Title	2+1次元O(3)非線形シグマ模型における分数スピンの問題について(基研研究会「量子ホール効果及び関連する物理」,研究会報告)
Author(s)	筒井, 泉
Citation	物性研究 (1999), 72(2): 122-127
Issue Date	1999-05-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/96611
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

2 + 1 次元 $O(3)$ 非線形シグマ模型における分数スピンの問題について

高エネルギー加速器研究機構・素粒子原子核研究所 田無分室　筒井 泉 [1]

2 + 1 次元 $O(3)$ 非線形シグマ模型においては、トポロジカルな項（Hopf 項）の存在のもとで分数スピン（fractional spin）が許され、これが低次元系での様々な (エキゾチックな) 物性に応用できるのではないかと期待されている。このときに重要になるのが場の配位 $\mathbf{n}(x)$ に対して分数スピンの値 Jを与える公式で、従来これは Hopf 項の係数をθ、配位のもつソリトン（skyrmion）電荷を Q とするとき $J = \frac{\theta}{2\pi}Q^2$ で与えられるとされてきた。本稿では、この公式が極めて限られた（`磁場’が等方的な）配位にしか成立しないことを議論する。

1 Hopf 項と分数スピン公式

初めに従来の分数スピン公式について、簡単に述べておくことにしよう。まず（トポロジカル項のない）2 + 1 次元 $O(3)$ 非線形シグマ模型は、3 次元ベクトル場 $\mathbf{n}(x) = (n_1(x), n_2(x), n_3(x))$ に対する作用

$$I_0[\mathbf{n}] = \int d^3x \, \frac{1}{2\lambda^2} \, \partial_\mu \mathbf{n}(x) \cdot \partial^\mu \mathbf{n}(x) \tag{1}$$

で定義される。ただしベクトル場 $\mathbf{n}(x)$ の長さは $\mathbf{n}^2(x) = \sum_{a=1}^{3} n_a^2(x) = 1$ に拘束されているものとする。さて、ここでカレント J^μ およびベクトルポテンシャル A_λを

$$J^\mu = \frac{1}{8\pi}\epsilon^{\mu\nu\lambda}\epsilon^{abc} n_a \partial_\nu n_b \partial_\lambda n_c =: \epsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda \tag{2}$$

によって導入し、これらを用いて

$$H(\mathbf{n}) := -\int d^3x \, A_\mu(x) \, J^\mu(x) \tag{3}$$

という項をつくり、これに角度パラメーター$\theta \in [0, 2\pi)$ をつけてもとの作用に付け加えよう：

$$I[\mathbf{n}] = I_0[\mathbf{n}] + \theta H(\mathbf{n}). \tag{4}$$

この付加項 (3) は通常 Hopf 項と呼ばれ、そのトポロジカルな性質（これについては以下に吟味する）が分数スピンの源であると考えられている。確かにカレント (2) はその定義から保存し、その電荷

$$Q(\mathbf{n}) := \int d^2x \, J^0(x) \tag{5}$$

[1] E-mail:tsutsui@tanashi.kek.jp

は、遠方で定ベクトル $\mathbf{n}(\infty)$ となるようなベクトル場

$$\mathbf{n}(x) = \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \longrightarrow \mathbf{n}(\infty) \qquad \text{as} \quad \|\mathbf{x}\| \to \infty \tag{6}$$

に対しては整数値をとる。この理由はこの境界条件がベクトル場の写像のなす空間（配位空間）を $\mathcal{Q} = \mathrm{Map}_0(S^2, S^2)$ という、（ある基点を固定した）球面 S^2から S^2への based map のなす空間に制限しており、これによって各々の配位がその写像度で同値類に分類できるからである。このことは、数学的にはホモトピー群

$$\pi_k(\mathcal{Q}) = \pi_{k+2}(S^2), \qquad \text{for} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

の特に $k = 0$ の場合の性質$\pi_0(\mathcal{Q}) = \pi_2(S^2) = \mathbf{Z}$ に基づいており、この右辺の整数が式 (5) の電荷 Q に対応し、これをソリトン（あるいは skyrmion）電荷と呼んでいる。

さて従来より提示されている、場の配位 $\mathbf{n}(x)$ に対する分数スピン公式は [1], [2], [3],[4],

$$J_{\mathrm{fractional}}(\mathbf{n}) = \frac{\theta}{2\pi} Q^2(\mathbf{n}) \tag{8}$$

である。これは分数スピンが配位のソリトン電荷の自乗、および Hopf 項の係数θに比例するという単純で美しい関係式であるが、本稿では、これが本当に一般的に成立するかということを問題にする。

2 インスタントンの存在と Hopf 項の定義

さて問題がトポロジカル項としての Hopf 項に起因するので、まずはその意味を数学的に明確にしなければならない。そのためには、対象とする $\mathbf{n}(x)$ に課す境界条件を、空間方向 (6) だけでなく時間に対しても課す必要がある。ここでは時空を $\mathbf{R}^2 \times [0, T]$ とし、時間方向には周期的条件

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{n}(\mathbf{x}, T) \tag{9}$$

を課すことにする。このようにすると上記のソリトン電荷だけでなく、さらに (7) で $k = 1$ とおいた場合に得られるホモトピーの性質$\pi_1(\mathcal{Q}) = \pi_3(S^2) = \mathbf{Z}$ に基づいて、さらに詳しく配位を同値類に分類できる。この右辺の整数に対応するのがインスタントン電荷で、数学的には本来その表式が Hopf 項となるべきものである。ところが、実は前出の式 (3) はこの点で少々問題があることに気づく。

それはまず第一に、(3) の $H(\mathbf{n})$ は配位 $\mathbf{n}(x)$ について非局所的であり、またベクトルポテンシャル A_λ の定義に $U(1)$ ゲージ変換 $A_\lambda \to A_\lambda + \partial_\lambda \Lambda$ の部分だけ不定性があるために、Hopf 項の値も不定になる可能性があること。第二に、周期的条件 (9) だけでは Hopf 項の値が整数になることが保証されないことである。このことは、上のホモトピーの性質が S^3から S^2への空間の分類であるのに対し、これに厳密に対応する条件が配位 $\mathbf{n}(x)$ に課されていないからである。（にも拘らず配位の分類は可能。対応すべき表式 (3) が一般に整数にならないだけである。）実際、条件 (9) をさらに厳しくして時刻 $t = 0, T$で定ベクトル $\mathbf{n}(\infty)$ となることにすれば、時空を S^3と見なすこ

とが出来て表式 (3) が整数を与える。しかしこの定ベクトル条件は、考察する配位をソリトン電荷がゼロのものだけに限定することと等しく、我々の興味のある分数スピンが現れる状況に対応できない。これらの問題を分析するために、以下に $SU(2)$ 群座標を用いる、非線形シグマ模型に対するより便利な記述法を採用することにしよう。

3 $SU(2)$ 群による $O(3)$ 非線形シグマ模型の定式化

一般の非線形シグマ模型はある Lie 群 G とその部分群 H からなる coset space G/H 上に値をもつ場を対象とする。$O(3)$ 非線形シグマ模型はこれが $SU(2)/U(1) \simeq S^2$ の場合であり、このことはこの模型の定式化には、$U(1)$ の対称性をもたせることによって群 $SU(2)$ に値をもつ場 $g(x)$ を用いるのが、ひとつの自然な方法であることを示唆している [5],[6],[7]。具体的には

$$g(x)\,T_3\,g^{-1}(x) = n_1(x)T_1 + n_2(x)T_2 + n_3(x)T_3 \tag{10}$$

という関係で元の場 $\mathbf{n}(x)$ から $g(x)$ を定義する。ここで $T_a = \frac{\sigma_a}{2i}$、$a = 1, 2, 3$ は群 $SU(2)$ の Lie 代数の基底である。この関係式 (10) は $\mathbf{n}(x)$ の長さを自動的に 1 に拘束するが、一方でひとつの配位 $\mathbf{n}(x)$ に対応する $g(x)$ を一意には決定しない。実際 $g(x)$ は $U(1)$ 部分群

$$g(x) \longrightarrow g(x)h(x), \qquad h(x) = e^{\xi(x)T_3} \in H = U(1) \tag{11}$$

だけ不定になっており、これが前に述べた $U(1)$ 対称性である。つまり群 $SU(2)$ による $O(3)$ 非線形シグマ模型の記述は、これを $U(1)$ ゲージ理論としての取り扱うことになる。しかし後でみるように群を用いることによって様々なメリットが生じ、また前にベクトルポテンシャルの定義で見られたように、もともと Hopf 項の定義には本質的に $U(1)$ 群に関する不定性の問題が存在するので、結局群 $SU(2)$ による記述がきわめて便利になるのである。

群 $SU(2)$ による定式化のためにまず注意しておきたいことは、配位 $\mathbf{n}(x)$ が (ある一定時刻では) $S^2 \to S^2$ という写像であったが、後に確認するように、これに対する $g(x)$ は必ずしも $S^2 \to SU(2)$ という写像として存在するとは限らないことである。そこで空間の無限遠を再び一点から元に戻して、空間を 2 次元の半径 1 のディスク D^2 とし、$g(x)$ を $D^2 \to SU(2)$ と考えることにする。次に、このような $g(x)$ に対して、元の $\mathbf{n}(x)$ への境界条件 (6) および (9) に対応するものとして、

$$g(x) = g(\infty)h(\mathbf{x}), \qquad h(\mathbf{x}) \in H = U(1), \qquad \mathbf{x} \in \partial D^2 \tag{12}$$

および定数配位 h_c により

$$g(\mathbf{x}, T) = g(\mathbf{x}, 0)\, h_c, \quad h_c \in H \tag{13}$$

という境界条件を設定することにする。ここで重要な点は、(12) では任意関数 $h(\mathbf{x})$ が時間によらないことで、これは元の $\mathbf{n}(x)$ への境界条件から要請されるわけではないが、Hopf 項の整数性の確保のために必要である。

このようにした上で、先のソリトン電荷 (5) と Hopf 項 (3) を $g(x)$ で表すと、

$$Q(g) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial D^2} \mathrm{tr}\, T_3(g^{-1}(x)dg(x)) \tag{14}$$

および

$$H(\bar{g}) = \frac{1}{48\pi^2}\int_{D^2\times[0,T]} \mathrm{tr}\,(g^{-1}(x)dg(x))^3 \tag{15}$$

となる。$g(x)$ の境界条件 (12) より $Q(g)$ の整数性が保証され、またもし空間が D^2 ではなく S^2 ならば $Q(g)=0$ となってしまう（従って写像 g に対しては D^2 を空間としなければならない）ことは式 (14) で明らかである。また (15) の Hopf 項は、もし積分領域が S^3 であれば良く知られた $S^3\to SU(2)$ の写像度を与える式であるが、そうでなく積分領域が $D^2\times[0,T]$ であっても、境界条件 (15) のお蔭で確かに整数値を与えることが確認出来る。従って上記の境界条件のもとで、Hopf 項を well-defined にすることが出来たことになる。

さて、これらの境界条件を保持するような群の積演算 $g\to gg'$ は新たな配位を生成するが、この演算のもとで上記のトポロジカルな電荷は加法則

$$Q(gg') = Q(g)+Q(g'), \qquad H(gg') = H(g)+H(g') \tag{16}$$

を満足する。これは元の $\mathbf{n}(x)$ では複雑な変換のもとでしか見られない性質であり、$SU(2)$ 群による記述がもたらす長所のひとつである。

ここで非自明なトポロジー配位の代表例として配位

$$\mathbf{n}_n^m(x) = (\cos(\alpha+\phi(t))\sin\beta,\ \sin(\alpha+\phi(t))\sin\beta,\ \cos\beta) \tag{17}$$

を考えよう。ただしここではディスク D^2 上に極座標 (r,φ) をとり、関数α,βは m,n を整数として境界条件

$$\alpha(r,2\pi)-\alpha(r,0)=2n\pi, \qquad \beta(1,\varphi)=\pi, \quad \beta(0,\varphi)=0, \qquad \phi(T)-\phi(0)=2m\pi \tag{18}$$

を満たすものとする。これは静的な n-ソリトン配位を（集団座標とよばれる）$\phi(t)$ によって m 回 \`捻る' ものであり、これに対応する $g(x)$ は

$$g_n^{(m)}(x) = e^{\phi(t)T_3}\, e^{\alpha T_3}\, e^{\beta T_2}\, e^{-\alpha T_3}\, e^{\phi(t)T_3} \tag{19}$$

で与えられる。 この配位のトポロジカル電荷を計算すると $Q(g_n^{(m)})=n$、$H(g_n^{(m)})=mn$ となっており、ソリトン電荷 n とインスタントン電荷 mn を持つことがわかる。

さて場の理論としての角運動量（スピン）を論じるために、この $SU(2)$ 群による記述法に基づくハミルトニアン形式（古典論）を構成しよう。これは作用 (1) を $g(x)$ で書き換え、それに通常のルジャンドル変換等の手続きを行なえばよい。その結果は、通常の群上のハミルトニアン系と同様に、\`右カレント' $R_a(\mathbf{x})$ という量を導入することによって Poisson 括弧が

$$\{g(\mathbf{x}),\, g(\mathbf{y})\} = 0 \tag{20}$$

$$\{R_a(\mathbf{x}),\, R_b(\mathbf{y})\} = \epsilon_{abc}\, R_c(\mathbf{x})\, \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{21}$$

$$\{R_a(\mathbf{x}),\, g(\mathbf{y})\} = g(\mathbf{x})\, T_a\, \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{22}$$

で与えられ、ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \frac{\lambda^2}{2}\Big[R_{a'} + \frac{\theta}{16\pi^2}\,\epsilon_{ij}\,\epsilon_{a'b'}\,(g^{-1}\partial_i g)_{b'}(g^{-1}\partial_j g)_3\Big]^2 + \frac{1}{2\lambda^2}(g^{-1}\partial_i g)_{a'}^2 \tag{23}$$

となる。そして これに $U(1)$ ゲージ対称性 (11) を生成する第 1 種拘束条件

$$\Phi := R_3 + \frac{\theta}{32\pi^2}\,\epsilon_{ij}\,\epsilon_{c'd'}(g^{-1}\partial_i g)_{c'}(g^{-1}\partial_j g)_{d'} = 0 \tag{24}$$

が課された拘束系が、$O(3)$ 非線形シグマ模型のハミルトニアン型式による古典論である。勿論、上記のハミルトニアンはゲージ不変$\{\Phi(\mathbf{x})\,,\mathcal{H}(\mathbf{y})\} = 0$ であり、物理量としての資格を備えている。さてこれからいよいよ懸案の場のスピンの評価に着手することにする。

4　物理的スピンとは

場の理論の標準的方法に従い、場の配位のもつ角運動量をエネルギー運動量テンソルから求めよう。$O(3)$ 非線形シグマ模型の対称エネルギー運動量テンソルは、その作用より

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\lambda^2}\sum_{a'=1}^{2}\{(g^{-1}\partial^\mu g)_{a'}(g^{-1}\partial^\nu g)_{a'} - \eta^{\mu\nu}(g^{-1}\partial_\rho g)^2_{a'}\} \tag{25}$$

となる。これから運動量および角運動量を

$$P^\mu := \int d^2x\,T^{0\mu}, \qquad J^{\mu\nu} := \int d^2x(x^\mu T^{0\nu} - x^\nu T^{0\mu}) \tag{26}$$

と定義すれば、これらは（量子化後、交換関係のもとで）$so(2,1)$ 代数

$$[P^\mu,\,P^\nu] \;=\; 0, \qquad i[P^\mu,\,J^{\nu\lambda}] = \eta^{\mu\lambda}P^\nu - \eta^{\mu\nu}P^\lambda \tag{27}$$

$$i[J^{\mu\nu},\,J^{\rho\lambda}] \;=\; \eta^{\nu\lambda}J^{\mu\rho} - \eta^{\mu\lambda}J^{\nu\rho} + \eta^{\mu\rho}J^{\nu\lambda} - \eta^{\nu\rho}J^{\mu\lambda} \tag{28}$$

を満足する。エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$はゲージ不変であるから、これらの P^μ、$J^{\mu\nu}$ともにゲージ不変であり、物理的観測量である。

さてこの角運動量のうち、空間内の回転に関する物理量 — これを通常この系におけるスピンと見なしている — は

$$J := \epsilon_{ij}\int d^2x\,x^i\,T^{0j} = \frac{1}{\lambda^2}\epsilon_{ij}x^i\sum_{a'=1}^{2}(g^{-1}\partial^0 g)_{a'}(g^{-1}\partial^j g)_{a'} \tag{29}$$

で与えられるが、問題はこの量のうちの非整数部分の評価にある。従来それは（配位 $\mathbf{n}(x)$ による記述で）位相空間の変数を用いて (29) を書き換え、Hopf 項のパラメターθ の有無によって整数、非整数部分を分離することによってなされてきた。これを我々の $g(x)$ を用いた記述で行なうと、$J = J_{\text{integer}} + J_{\text{fractional}}$と分離したときの各部分は｀磁場’$B_a := \epsilon_{ij}\,\partial_i(g^{-1}\partial_j g)_a$を用いて

$$J_{\text{integer}} \;=\; \int d\mathbf{x}\,\epsilon_{ij}\,x^i\,R_{a'}\,(g^{-1}\partial_j g)_{a'} \tag{30}$$

$$J_{\text{fractional}} \;=\; -\frac{\theta}{16\pi^2}\int d\mathbf{x}\,\epsilon_{ij}\,x^i\,B_{a'}\,(g^{-1}\partial_j g)_{a'} \tag{31}$$

とかくことができ、一見 J_{integer}は Hopf 項の無い場合のスピンであって当然整数部分を担い、一方 $J_{\text{fractional}}$ は Hopf 項のパラメターθに依存する非整数部分を表すかのように見える。実際これ

が従来の解釈であり、分数スピン公式 (8) はこれに基づいて求められたものである。ところが残念ながらこのように定義された (31) の各スピンはともにゲージ不変でなく、

$$\{\Phi(\mathbf{x})\,,\,J_1\} = -\{\Phi(\mathbf{x})\,,\,J_2\} = \epsilon_{ij}\,x^i\,\partial_j B_3(\mathbf{x}) \tag{32}$$

従って一般に物理的観測量でない。明らかに、これらが物理的観測量になるのは (32) の左辺が消えるとき、つまり上で定義した磁場の第 3 成分（これはソリトンカレントに比例する）が、ディスク D^2の中心からの距離のみに依存する等方的な場合に限られることになる。

これを量子論レヴェルで検証するために、前述の (17) で表される集団座標をもつ n-ソリトン、mn-インスタントン配位 $g_n^{(m)}(x)$ を考える。これを集団座標についての量子力学として考察することにすると、ハミルトニアン演算子

$$\widehat{H} = M + \frac{1}{2K}\left(\frac{1}{i}\frac{d}{d\phi} - \frac{\theta}{2\pi}\,n\right)^2 \tag{33}$$

に対しエネルギー $E = M + (k - \frac{\theta}{2\pi}n)^2/2K$ をもつ固有状態$\Psi_k(\phi) = e^{ik\phi}$ （kは整数）が求まる。この状態はスピン演算子に対しても固有状態になっており、そのスピン固有値は定数

$$I := \frac{\int d\mathbf{x}\,\sin^2\beta\,\partial_\varphi\alpha}{\int d\mathbf{x}\,\sin^2\beta} \tag{34}$$

を用いて

$$J = -\left(k - \frac{\theta}{2\pi}\,n\right) I \tag{35}$$

となる。定数I は一般に整数とは限らないから、上のスピン (35) のうちのどの部分が非整数部分なのか不明瞭である。ただ、もしここで関数αがφのみ、βがrにのみ依存する関数のときは$I = Q(g)$となり、従来の公式 (8) を再現することがわかる。これは前に述べた磁場の等方性がある場合である。より詳細な議論および参考文献は論文 [6], [7] を参照されたい。

参考文献

[1] F. Wilczek and A. Zee, *Phys. Rev. Lett.* **51** (1983) 2250.

[2] M.J. Bowick, D. Karabali and L.C.R. Wijewardhana, *Nucl. Phys.* **B271** (1986) 417.

[3] G.W. Semenoff and P. Sodano, *Nucl. Phys.* **B328** (1989) 753.

[4] S. Forte, *Rev. Mod. Phys.* **64** (1992) 193.

[5] A.P. Balachandran, A. Stern and G. Trahern, *Phys. Rev.* **D19** (1979) 2416.

[6] H. Kobayashi, S. Tanimura and I. Tsutsui, *Nucl. Phys.* **B514** (1998) 667.

[7] M. Kimura, H. Kobayashi and I. Tsutsui, *Nucl. Phys.* **B527** (1998) 624.